TD 5

Exercice 1 – Support Vector Machine

On considère ici un problème de classification binaire vers $Y = \{-1, +1\}$ de données dans un espace de description $X \in \mathbb{R}^d$. On note $\{(\mathbf{x}^i, y^i) \in (X, Y)\}, i \in \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble d'apprentissage considéré. La fonction de décision du classifieur considéré est donnée par : $f_{\mathbf{w},b}(\mathbf{x}) = sign(\mathbf{w}^T\mathbf{x} + b)$.
On considère dans un premier temps un ensemble de données linéairement séparable. Cet ensemble de données et la frontière de décision sont représentés (en 2D) sur la figure 1.

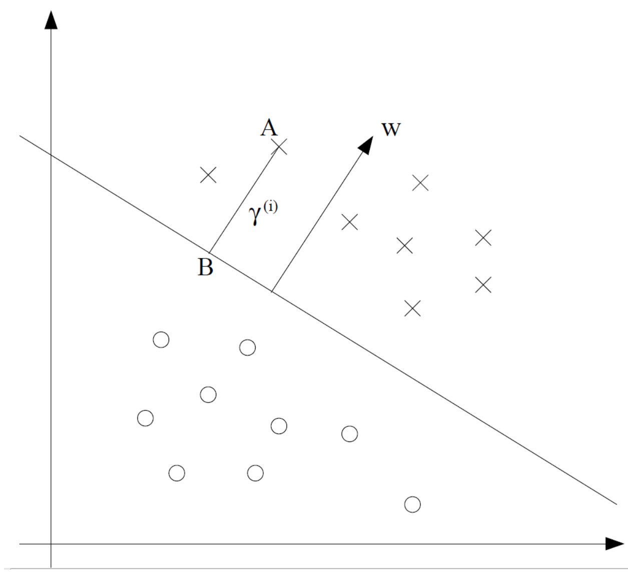

FIGURE 1 – Ensemble de données linéairement séparables

Q 1.1 Marge
Sur cette figure, l'échantillon $\mathbf{x}^i$ et de label y^i est représenté par le point A. On s'intéresse à sa distance signée γ^i à la frontière de decision (dont le point le plus proche est représenté en B sur la figure).

Q 1.1.1 Sachant que $\mathbf{w}/||\mathbf{w}||$ est un vecteur unitaire orthogonal à la frontière de décision, donner l'expression de γ^i en fonction de $\mathbf{x}^i$, y^i, $\mathbf{w}$ et b.

Q 1.1.2 Montrer que la distance et la solution ne change pas en multipliant la solution par un scalaire, i.e. pour $(\alpha\mathbf{w}, \alpha b)$. Que cela implique-t-il si l'on souhaite éloigner au maximum (au sens géométrique) les points de la frontière de décision ?

Q 1.2 Formulation du SVM
On considère alors le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\min_{\mathbf{w},b} \frac{1}{2}||\mathbf{w}||^2$$

$$s.t. \qquad y^i(\mathbf{w}^T\mathbf{x}^i + b) \geq 1, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Q 1.2.1 Pourquoi choisit-on la contrainte ≥ 1 plutôt que ≥ 0 ? Pourquoi 1 ?

Q 1.2.2 Poser le Lagrangien à considérer pour optimiser ce problème sous contraintes

Q 1.2.3 Donner la solution analytique de la minimisation de ce Lagrangien selon $\mathbf{w}$ et b

Q 1.2.4 En déduire une nouvelle formulation "duale" de notre problème d'optimisation sous contraintes

Q 1.2.5 Que cette nouvelle formulation permet-elle ?

Q 1.2.6 Quel est le problème du problème d'optimisation que l'on a considéré ? Proposer une nouvelle formulation qui corrige ce problème

Q 1.2.7 Proposer la formulation duale de ce nouveau problème

Q 1.2.8 Donner la fonction de classification obtenue après optimisation de cette formulation duale du SVM

Q 1.2.9 D'après les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) concernant les propriétés de la solution optimale d'un Lagrangien, on a : $a_i(1 - \xi_i - y^i(\mathbf{w}^T\mathbf{x}^i + b)) = 0,\ \forall i \in \{1..N\}$ et $\beta_i\xi_i = 0,\ \forall i \in \{1..N\}$. Qu'en déduire pour les paramètres a_i obtenus à l'optimum ?

Q 1.2.10 Qu'en déduire pour l'estimation du biais b ?

Exercice 2 – Noyaux

Q 2.1 Montrez que si K et K' sont deux noyaux (i.e. il existe ϕ et ϕ' telles que $K(x, y) =< \phi(x), \phi(y) >$, $K'(x, y) =< \phi'(x), \phi'(y) >$) :

Q 2.1.1 cK est un noyau pour $c \in \mathbb{R}^+$

Q 2.1.2 $K + K'$ est un noyau ;

Q 2.1.3 KK' est un noyau ;

Q 2.1.4 $(1+ < x, x' >)^d$ est un noyau.

Exercice 3 – Noyaux sur les chaînes de caractères

Soit S une séquence de mots sur un alphabet $\mathcal{A}$ fini. Montrez que :

1. $K(x, x')$ = nombre de sous-chaînes de longueur 5 que x et x' ont en commun est un noyau ;
2. $K(x, x') = 1$ si x et x' ont au moins une sous-chaîne de longueur 5 en commun, 0 sinon, n'est pas un noyau (indice : considérez 3 chaînes x,x' et x'').