ARF

Regression linéaire
Descente de gradient

Cours 3

Nicolas Baskiotis
nicolas.baskiotis@lip6.fr

Master 1 DAC

équipe MLIA, Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (LIP6)
Université Pierre et Marie Curie (UPMC)

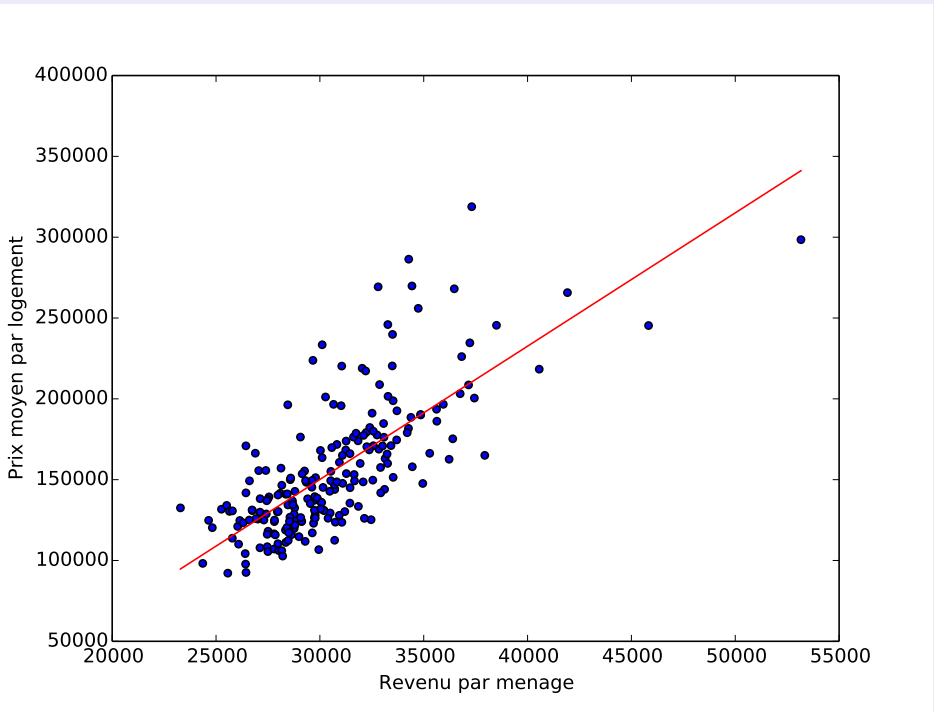
S2 (2015-2016)

Plan

Introduction

Regression linéaire

- Objectif : prédire une sortie continue réèlle y à partir d'un nombre de variables d'entrée
- beaucoup d'applications, très utilisée un peu dans tous les domaines
- très flexible (transformation des entrées)



Formalisation

Objectifs

Etant donné un ensemble $\{(x^i, y^i)\} \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$,

- on cherche une sortie linéaire en fonction des entrées : $E(y|x) = w_0 + \sum_{i=1}^{d} w_i x_i$

$\Rightarrow f(x) = w_0 + \sum_{i=1}^{d} w_i x_i$

- qui fait le moins d'erreurs : $f(x_i)$ doit être proche de y_i
- sous la condition que l'erreur est indépendante de x, de variance σ^2 constante, suit une loi normale.

$\Rightarrow y|x \sim \mathcal{N}(f(x), \sigma^2)$ (lien avec l'apprentissage bayésien)

- Erreur moindres carrés (MSE) : $\sum_{i=1}^{n} (y^i - f(x^i))^2$

Résolution

Méthode

- Minimiser $\sum_{j=1}^{n}(y^j - f(x^j))^2 = \sum_{j=1}^{n}(y^j - w_0 - \sum_{i=1}^{d} w_i x_i^j)^2$
- Annuler le gradient $\rightarrow$ solution analytique.

Ecriture matricielle

- $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_d^1 \\ x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_d^2 \\ & & \vdots & \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_d^n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$
- Minimiser : $(Y - W'X)(Y - W'X)'$
- Solution : $(X'X)^{-1}X'Y$
- Et pour w_0 ?

Plan

Problèmatique

Comment adapter la régression à la classification ?

- Régression : $y|x \sim \mathcal{N}(w`x, \sigma^2)$
- Pas adapter ! On veut une classification binaire

$\Rightarrow$ Modélisation par une variable de Bernouilli :
$p(y|x) = \mu(x)^y(1-\mu(x))^{1-y}$ (avec $y \in \{-1, 1\}$)

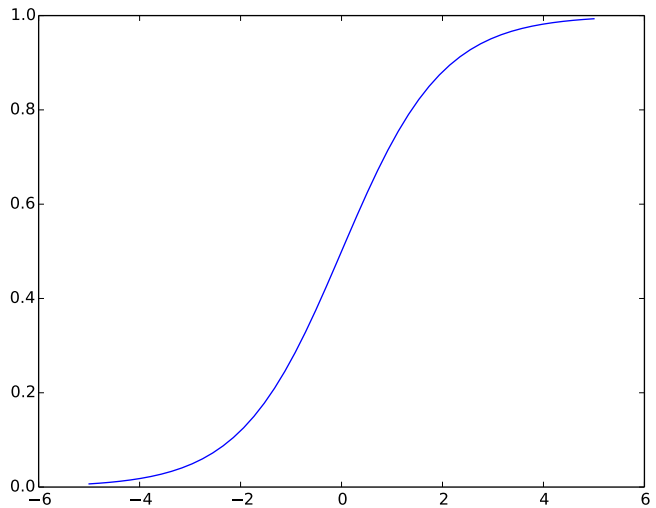
- Comment représenter $\mu(x)$? fonction linéaire ? , avec $\eta(x) = \ln \frac{P(+|x)}{P(-|x)}$

Problèmatique

Comment adapter la régression à la classification ?

- On représente plutôt le ratio : $\frac{P(+|x)}{P(-|x)} = \frac{\mu(x)}{1-\mu(x)}$
- On tente d'approximer le log du ratio par une fonction linéaire : $\ln \frac{P(+|x)}{P(-|x)} = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 \ldots$
- Soit $\ln \frac{P(+|x)}{P(-|x)} = \ln \frac{P(+|x)}{1-P(+|x)} = w_0 + \sum_i w_i x_i$
- Donc $P(+|x) = \frac{1}{1+e^{w_0+\sum_i w_i x_i}}$

$\Rightarrow$ fonction logistique : $\mu(x) = \frac{1}{1+e^{-\eta(x)}}$, avec $\eta(x) = \ln \frac{P(+|x)}{P(-|x)}$



Régression logistique

Principe

Quand est-ce que :

- $p(+|x) = 0.5$?
- $p(+|x) < 0.5$?
- $p(+|x) > 0.5$?

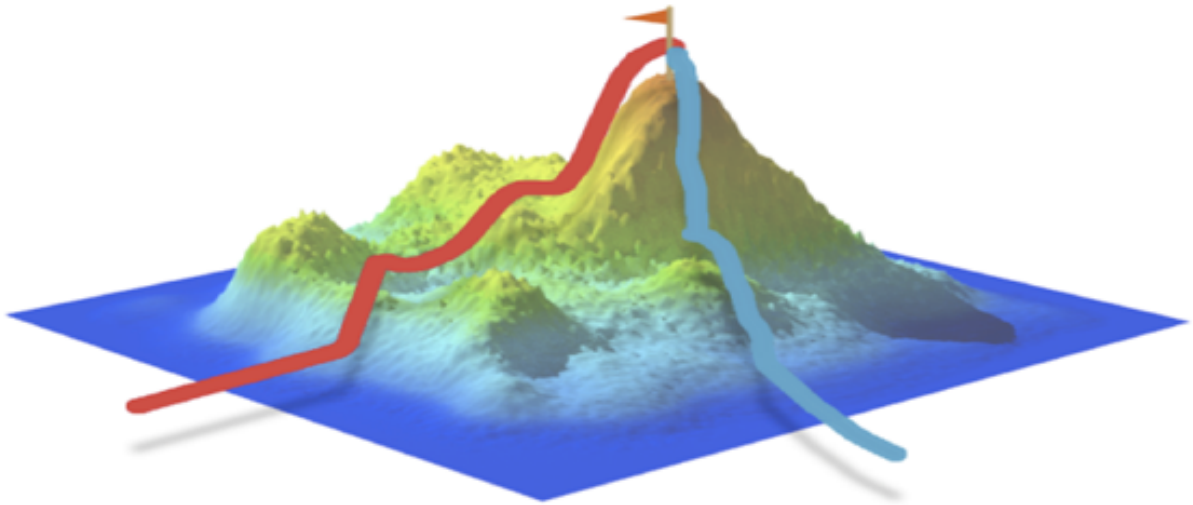
Résolution

- Pas de solution analytique.
- Méthode d'optimisation numérique $\rightarrow$ descente de gradient.

Plan

Principe

- Algorithme d'optimisation différentiable
- S'applique pour toute fonction différentiable
- Idée simple : améliorer de façon itérative la solution courante



Quelques notations et rappels

Convexité

- C ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$: $\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1], \lambda x + (1-\lambda)y \in C$
- $\sum_i \lambda_i x_i$ est une combinaison convexe ssi $\forall i, \lambda_i \geq 0$ et $\sum_i \lambda_i = 1$
- Enveloppe convexe d'un ensemble fini $\{x_i\}, i = 1 \ldots n$: toutes les combinaisons convexes de l'ensemble
- Fonction convexe $f : X \to \mathbb{R}$ ssi $\forall x, x' \in X, \forall \lambda \in [0,1]$ tq $\lambda x + (1 - \lambda x' \in X$ alors $f(\lambda x + (1-\lambda)x') \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')$

$\rightarrow$ si $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_i \lambda_i = 1$, alors $f(\sum_i \lambda_i x_i) \leq \sum_i \lambda_i f(x_i)$ (inégalité de Jensen)

Quelques notations et rappels

Différentiabilité

- Si $f : X \to \mathbb{R}$ est convexe ssi $\forall x, x' \in X, f(x') \geq f(x) + < x' - x, \nabla f(x) >$
- Si f convexe, alors sa matrice hessienne est définie semi-positive : $\nabla^2 f \geq 0$.

Minimum

- Si f atteint son minimum, alors les minimums forment un ensemble convexe.
- Si l'ensemble est strictement convexe, le minimum est un singleton.

Algorithme du gradient

Algorithme

1. Choisir un point x_0
2. Itérer :
   - Calculer $\nabla f(x_t)$
   - mettre à jour $x_{t+1} \leftarrow x_t - \alpha \nabla f(x_t)$