Exercice 1 Résolution

On considère les couples de clauses suivants. Pour chacun d'eux, indiquer la résolvante de leur résolution sur leur premier littéral complémentaire.

1. $C_1 = p \vee r$ et $C_2 = \neg p \vee \neg s \vee t$
2. $C_1 = p \vee q \vee r$ et $C_2 = p \vee \neg q \vee s \vee \neg t$
3. $C_1 = p \vee q \vee \neg r$ et $C_2 = \neg p \vee \neg q \vee r \vee s$
4. $C_1 = p \vee q \vee \neg r$ et $C_2 = p \vee q \vee r \vee s$
5. $C_1 = p \vee q \vee \neg r$ et $C_2 = p \vee q \vee r$
6. $C_1 = p$ et $C_2 = \neg p \vee r \vee s$
7. $C_1 = p$ et $C_2 = \neg p$

Exercice 2 Propagation unitaire

On considère l'ensemble de clauses suivant :

$$C_1 = a \vee b \quad C_2 = \neg a \vee b \vee c \quad C_3 = b \vee \neg c \vee d \quad C_4 = \neg b \vee \neg e \quad C_5 = e \vee d \quad C_6 = \neg d$$

1. Appliquer la propagation unitaire à $F = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4 \wedge C_5 \wedge C_6$. Qu'obtient-on ? Que peut-on en déduire ?
2. On pose $D_3 : \neg b \vee \neg c \vee d$. Appliquer la propagation unitaire à $F_2 = C_1 \wedge C_2 \wedge D_3 \wedge C_4 \wedge C_5 \wedge C_6$, obtenue en remplaçant C_3 par D_3 dans F. Qu'obtient-on ? que peut-on en déduire ?

Exercice 3 Satifisfiabilité et DPLL

On considère la théorie clausale suivante

$$\Sigma = \{ \begin{array}{llll} a \vee b \vee c, & a \vee b \vee \neg c, & a \vee \neg b \vee d \vee e, & a \vee \neg b \vee \neg d \vee e, \\ \neg a \vee b \vee d \vee e, & \neg a \vee b \vee d \vee \neg e, & \neg a \vee \neg b \vee f & \end{array} \}$$

1. **Restrictions de formule.** Soient les interprétations $\mathcal{I}_1 = \{\neg a, c\}$ et $\mathcal{I}_2 = \{a, \neg b, \neg d\}$.
   — Calculer $\Sigma_{|\mathcal{I}_1}$ et indiquer si elle satisfiable (en justifiant votre réponse).
   — Calculer $\Sigma_{|\mathcal{I}_2}$ et indiquer si elle satisfiable (en justifiant votre réponse).
   — Que peut-on en déduire pour Σ ?
2. **Résolution**.
   — En utilisant uniquement des résolutions auto-soussommantes, réduire Σ à une forme simple (on peut arriver à 4 clauses de tailles 2 ou 3 en 5 résolutions) que l'on note Σ'.
   — On considère $\Sigma_2 = \Sigma' \cup \{\neg f, b \vee \neg d, a \vee \neg e\}$. Montrer par résolution que Σ_2 est UNSAT.
3. **Algorithme DPLL.**
   Pour le choix de la variable de décision on utilise l'heuristique basée sur le nombre d'occurences (positive et négatives) de la variable dans les clauses les plus petites. Pour $k \in \mathbb{N}, k > 1$ représentant une longueur de clause, et p une variable propositionnelle, on pose $h_k(p) = nb_{occ}(k, \Sigma, p) + nb_{occ}(k, \Sigma, \neg p)$ où $nb_{occ}(k, \Phi, l) = Card(\{C_j \in \Phi | l \in C_j \text{ et } Card(C_j) = k\})$ est le nombre d'occurences du littéral l dans des clauses de Φ de taille k. L'heuristique consiste alors à sélectionner les variables qui maximisent h_2, puis, parmi celles-ci, celles qui maximisent h_3, et ainsi de suite pour isoler une seule variable. Si cela ne suffit pas à départager deux variables (même valeur de h_k pour tous les k), on utilise l'ordre alphabétique de leur nom. On explore toujours la branche faux en premier.
   — Appliquer l'algorithme DPLL avec l'heuristique donnée pour montrer que Σ est SAT et donner un modèle.
   — Avec DPLL, montrer que Σ_2 est UNSAT.

Exercice 4 Conflict-Driven Clause Learning

On considère la théorie composée des clauses suivantes :

$$\begin{array}{lll} \phi_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 & \phi_2 = x_1 \vee x_6 \vee \neg x_7 & \phi_3 = x_1 \vee x_8 \\ \phi_4 = \neg x_3 \vee x_4 \vee \neg x_6 & \phi_5 = \neg x_5 \vee x_6 \vee x_7 & \phi_6 = x_5 \vee x_6 \vee \neg x_8 \end{array}$$

L'heuristique de choix de variables est initialement uniquement basée sur l'ordre de variables : x_1 est choisi en premier, puis x_2, etc... On teste toujours en premier la valeur faux.

1. **Première série de propagations et choix par niveau de décision.** Dérouler les choix et propagations unitaires suivant l'heuristique jusqu'à arriver à un conflit. Bien noter à chaque niveau de décision, la variable choisie et les variables dérivées par propagation unitaire (en indiquant pour chacune la clause dont elle est dérivée).
2. **Analyse de conflit par résolution.** Déterminer le premier point d'implication unique (FUIP) par la méthode de résolution.
   Rappel sur cette méthode : On commence par résoudre entre elles les deux clauses qui causent le conflit pour obtenir la clause β_1, puis on élimine dans l'ordre les variables du niveau de décision actuel de β_i par résolution sur elles entre la clause dont elles sont dérivées et la clause β_i (pour obtenir β_{i+1}) en s'arrêtant dès que β_i ne contient plus qu'une seule variable du niveau de décision actuel.
3. **Analyse de conflit par graphe d'implication.** Construire le graphe d'implication de ce conflit et déterminer le FUIP par le graphe.
   Rappel : Le graphe d'implication est construit en mettant comme nœud toutes les variables produites à chaque niveau de décision (en séparant bien les différents niveaux de décision). Chaque variable de choix (qu'on rassemble plutôt vers le haut du graphe, la partie "Raison") est entourée, et chaque variable dérivée est reliée à toutes les variables qui apparaissent dans la clause dont elle est dérivée. On réalise alors des coupures en s'éloignant progressivement du conflit. Chaque coupure donne une clause (en prenant la négation des arêtes coupées côté raison) et le FUIP est la coupure la plus proche du conflit ne contenant qu'une seule variable du niveau de décision actuel.
4. **Apprentissage et backjump.** Indiquer la clause apprise et comment effectuer le backjump (retour arrière non synchrone) qui s'ensuit, puis dérouler le reste de l'algorithme (sans changer l'heuristique) jusqu'à la prochaine découverte d'un modèle ou d'un conflit. Peut-on conclure sur la satisfiabilité de cet ensemble de clause à ce stade ?
5. **Entraînement.** Mêmes questions avec la théorie suivante :

$$\begin{array}{lll} \psi_1 = x_1 \vee x_2 & \psi_2 = \neg x_2 \vee \neg x_3 & \psi_3 = \neg x_2 \vee x_4 \vee \neg x_5 \\ \psi_4 = x_3 \vee x_5 \vee x_6 & \psi_5 = x_7 \vee \neg x_6 \vee \neg x_8 & \psi_6 = x_4 \vee x_8 \vee x_9 \\ \psi_7 = x_{10} \vee \neg x_9 \vee x_{11} & \psi_8 = x_8 \vee \neg x_{11} \vee \neg x_{12} & \psi_9 = x_{12} \vee \neg x_{13} \\ \psi_{10} = x_{12} \vee x_{14} & \psi_{11} = \neg x_6 \vee x_{12} \vee x_{15} & \psi_{12} = \neg x_{14} \vee x_{13} \vee \neg x_{16} \\ \psi_{13} = \neg x_{14} \vee \neg x_{15} \vee x_{16} & & \end{array}$$

6. **Entraînement bis.** Traiter avec CDCL la théorie Σ_2 de l'exercice 3.